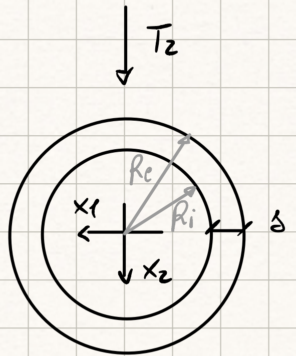
Esercizio

Determinare l'andamento delle tensioni tangenziali nella sezione indicata.

Si consideri la sezione di piccolo spessore.



Svolgimento

Il momento di inerzia polare della corona circolare vale

$$I_p = \frac{\pi}{2}(R_e^4 - R_i^4).$$

Con l'hp di piccolo spessore possiamo considerare l'area concentrata lungo la linea media e I_p pari a:

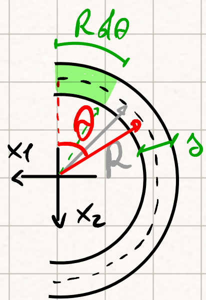
$I_p = 2\pi \delta R^3$, con R il raggio medio: $R = \dfrac{R_e + R_i}{2}$.

Poiché $I_p = I_1 + I_2$ * e dato che la sezione è simmetrica, si ha $I_1 = I_2$, da cui:

$$I_p = 2 I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{1}{2} I_p \Rightarrow I_1 = \pi \delta R^3$$

Applichiamo la formula di Jourawsky:

$$\tau_{3i} = - \frac{T_2 S_1^*}{I_1 \delta_j}$$



$$A = \pi (R_e^2 - R_i^2) = 2\pi R \delta$$

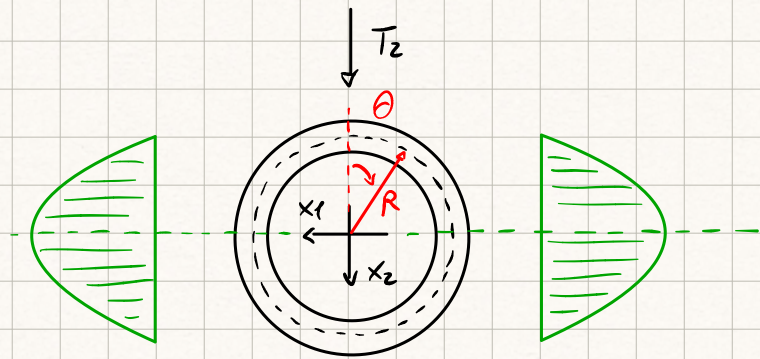
$$dA = R \delta \, d\theta$$

$$S_1^* = \int_{A^*} x_2 \, dA = \int_0^\theta (-R\cos\theta)\cdot R s \, d\theta = -R^2 s \cdot \sin\theta \Big|_0^\theta = -R^2 s \sin\theta$$

Sostituendo nella formula di Jourawsky abbiamo:

$$\tau_{3i} = -\frac{T_2 \cdot (-R^2 s \cdot \sin\theta)}{\pi s R^3 \cdot s} = \frac{T_2 \cdot \sin\theta}{\pi s R} = \frac{2\,T_2 \cdot \sin\theta}{A}$$

$$\tau_{3max} = \tau_{3i}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\,\frac{T_2}{A}$$



* Nota sulle proprietà geometriche della sezione.

Ricordiamo che il tensore dei momenti di inerzia di un'area A rispetto al sistema di riferimento Ox_1x_2 è dato da:

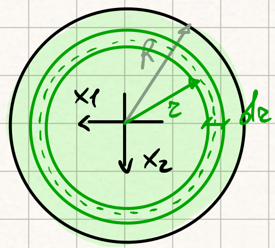
$$\underline{\underline{I}} = \int_A \underset{\sim}{x}\,\underset{\sim}{x}^T dA = \begin{pmatrix} \int_A x_1^2 \, dA & \int_A x_1 x_2 \, dA \\ \int_A x_2 x_1 \, dA & \int_A x_2^2 \, dA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{22} & I_{12} \\ I_{21} & I_{11} \end{pmatrix}$$

La traccia di $\underline{\underline{I}}$ è detta momento di inerzia polare:

$I_p = I_{11} + I_{22}$.

Dato che la corona circolare è una sezione simmetrica rispetto a entrambi gli assi x_1 e x_2 si ha $I_{11} = I_{22}$.

Momento di inerzia polare di un cerchio.



$$A = \pi R^2 \Rightarrow dA = 2\pi r \cdot dr$$

$$I_p = \int_A r^2 dA = \int_0^R r^2 \cdot 2\pi r \, dr = \int_0^R 2\pi \, r^3 dr = \pi \frac{r^4}{2}\Big|_0^R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_p = \pi \frac{R^4}{2}$$

Per la corona circolare: $I_p = I_{pe} - I_{pi} = \frac{\pi}{2} R_e^4 - \frac{\pi}{2} R_i^4 = \frac{\pi}{2}\left(R_e^4 - R_i^4\right)$.