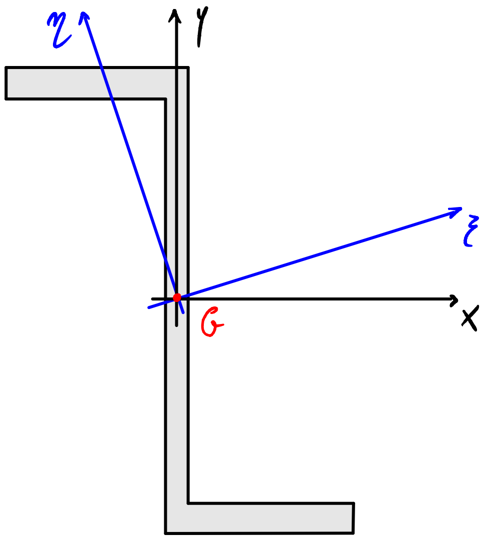
Scienza delle Costruzioni

Geometria delle Aree

Baricentro e Momenti di inerzia principiali



Calcolo del baricentro

Data una figura piana e un sistema di riferimento Oxy per calcolarne il baricentro dobbiamo effettuare i seguenti passaggi:

1) Calcoliamo i momenti di inerzia statici S_x e S_y

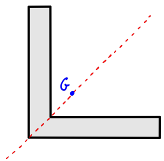
$$S_x = \int_A y\,dA \qquad S_y = \int_A x\,dA$$

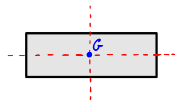
2) Calcoliamo le coordinate del baricentro come

$$x_G = \frac{S_y}{A} \qquad y_G = \frac{S_x}{A}$$

Osservazioni sul baricentro

Se la figura piana possiede un asse di simmetria, il baricentro si trova su tale asse. Se gli assi di simmetria sono due, il baricentro è il punto in cui tali assi si intersecano.





Se la figura piana è scomponibile in n figure elementari di cui conosciamo le posizioni dei baricentri $G_1, G_2, \ldots, G_n$ il baricentro dell'intera figura può essere calcolato come:

$$x_G = \frac{x_{G1}A_1 + x_{G2}A_2 + \ldots + x_{Gn}A_n}{A_1 + A_2 + \ldots + A_n}$$

$$y_G = \frac{y_{G1}A_1 + y_{G2}A_2 + \ldots + y_{Gn}A_n}{A_1 + A_2 + \ldots + A_n}$$

Calcolo dei momenti di inerzia

Data una figura piana definiamo momenti di inerzia del secondo ordine le seguenti quantità:

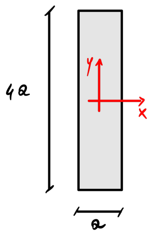
$$I_x = \int_A y^2 dA \qquad I_y = \int_A x^2 dA \qquad I_{xy} = \int_A xy\, dA$$

Osservazione 1

Per i rettangoli vale la seguente formula per il calcolo dei momenti di inerzia baricentrici:

$$I_j = \frac{1}{12} \cdot d_{\parallel} \cdot d_{\perp}^3$$

Il momento di inerzia rispetto all'asse x è pari a un dodicesimo per la dimensione del rettangolo parallela all'asse x per il cubo della dimensione del rettangolo perpendicolare all'asse x



Dimensione del rettangolo parallela all'asse x

$$I_x = \frac{1}{12} \cdot a \cdot (4a)^3$$

Dimensione del rettangolo parallela all'asse x

$$I_y = \frac{1}{12} \cdot 4a \cdot (a)^3$$

Osservazione 2

Se indichiamo con I_x , I_y e I_{xy} i momenti di inerzia calcolati rispetto a un sistema di riferimento baricentrico, i momenti di inerzia rispetto a due assi x' e y' (paralleli, rispettivamente, a x e y) sono calcolabili mediante il **teorema del trasporto di Huygens**:

$$\boxed{\begin{aligned} I_{x'} &= I_x + d_{x'x}^2 \cdot A \\ I_{y'} &= I_y + d_{y'y}^2 \cdot A \\ I_{x'y'} &= I_{xy} + d_{x'x} d_{y'y} \cdot A \end{aligned}}$$

In tali formule A è l'**area della figura piana** e $d_{x'x}(d_{y'y})$ è **la distanza (con segno)** che va dall'asse baricentrico $x'(y')$ all'asse $x(y)$

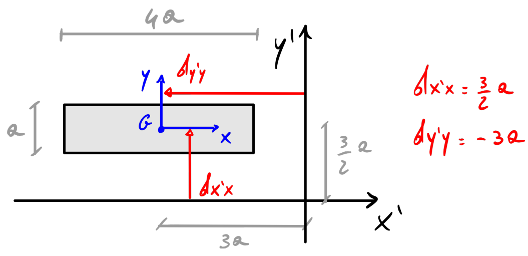


FIG. 3

Ad esempio, per il rettangolo in figura 3 si ha:

$$I_{x'} = \frac{1}{12} \cdot 4a \cdot a^3 + \left(\frac{3}{2}a\right)^2 (4a^2)$$

Area rettangolo

Dimensione rettangolo parallela a y

$$I_{y'} = \frac{1}{12} \cdot a \cdot (4a)^3 + (-3a)^2 (4a^2)$$

Dimensione rettangolo perpendicolare a y

Distanza (con segno) tra gli assi y' e y

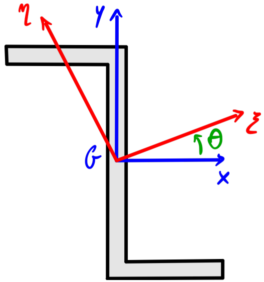
$$I_{x'y'} = 4a \cdot a \cdot (-3a)\left(\frac{3}{2}a\right)$$

Momenti principali di inerzia

Se un sistema di riferimento $G\xi\eta$ è tale che il momento di inerzia misto $I_{\xi\eta}$ calcolato rispetto ai suoi assi è nullo, il sistema di riferimento viene detto sistema di riferimento principale di inerzia.

In tal caso i momenti di inerzia I_ξ e I_η vengono detti momenti di inerzia principali.

Affinché un sistema di riferimento baricentro (in cui $I_{xy} \neq 0$) diventi principale è necessario ruotarlo della quantità



$$\theta = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{I_{xy}}{I_y - I_x}\right)$$

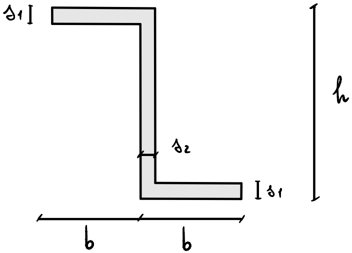
con $I_x > I_y$ e considerato positivo se antiorario. I momenti principali di inerzia del sistema ruotato $G\xi\eta$ sono ottenibili come:

$$I_{\xi,\eta} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

con $I_\xi > I_\eta$ nell'ipotesi che $I_x > I_y$.

Esercizio 1

Data la sezione indicata in figura, determinare il nocciolo centrale di inerzia.



$h = 20\ cm \quad b = 8\ cm$

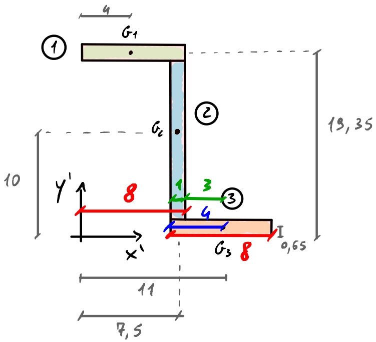
$\delta_1 = 1,3\ cm \quad \delta_2 = 1\ cm$

Svolgimento

1) Calcoliamo il baricentro

$A_1 = 1,3 \cdot 8 \qquad A_2 = 17,4 \cdot 1 \qquad A_3 = 1,3 \cdot 8$

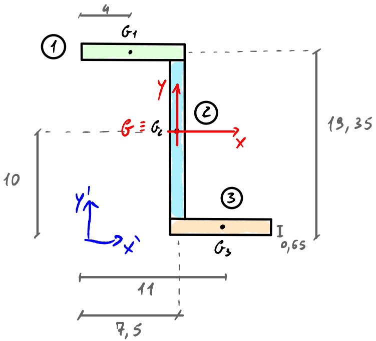
$G_1 (4 ; 19,35) \qquad G_2 (7,5 ; 10) \qquad G_3 (11 ; 0,65)$



$$x'_G = \frac{x_{G1} A_1 + x_{G2} A_2 + x_{G3} A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{4 \cdot 1,3 \cdot 8 + 7,5 \cdot 17,4 \cdot 1 + 11 \cdot 1,3 \cdot 8}{1,3 \cdot 8 + 17,4 \cdot 1 + 1,3 \cdot 8} = \frac{286,5}{38,2} = 7,5\ cm$$

$$y'_G = \frac{y_{G1} A_1 + y_{G2} A_2 + y_{G3} A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{19,35 \cdot 1,3 \cdot 8 + 10 \cdot 17,4 \cdot 1 + 0,65 \cdot 1,3 \cdot 8}{1,3 \cdot 8 + 17,4 \cdot 1 + 1,3 \cdot 8} = \frac{382}{38,2} = 10\ cm$$

2) Calcoliamo i momenti principali di inerzia



$$I_{x1} = \frac{1}{12} \cdot 8 \cdot (1,3)^3 + 8 \cdot 1,3 \cdot (19,35 - 10)^2 = 910,66 \text{ cm}^4$$

$$I_{x2} = \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot (17,4)^3 + 17,4 \cdot 1 \, (0)^2 = 439 \text{ cm}^4$$

$$I_{x3} = \frac{1}{12} \cdot 8 \cdot (1,3)^2 + 8 \cdot 1,3 \cdot (10 - 0,65)^2 = 910,66 \text{ cm}^4$$

$$I_x = I_{x1} + I_{x2} + I_{x3} = 2260,32 \text{ cm}^4$$

$$I_{y1} = \frac{1}{12} \cdot 1,3 \cdot 8^3 + 1,3 \cdot 8 \cdot (7,5 - 4)^2 = 182,87 \text{ cm}^4$$

$$I_{y2} = \frac{1}{12} \cdot 17,4 \cdot 1^3 + 17,4 \cdot 1 \cdot (0)^2 = 1,45 \text{ cm}^4$$

$$I_{y3} = \frac{1}{12} \cdot 1,3 \cdot 8^3 + 1,3 \cdot 8 \, (11 - 7,5)^2 = 182,87 \text{ cm}^4$$

$$I_y = I_{y1} + I_{y2} + I_{y3} = 367,19 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy}^{(1)} = 1,3 \cdot 8 \cdot (9,35) \cdot (-3,5) = -340,34 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy}^{(2)} = 17,4 \cdot 1 \cdot (0) \cdot (0) = 0$$

$$I_{xy}^{(3)} = 1,3 \cdot 8 \cdot (-9,35) \cdot (3,5) = -340,34 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = I_{xy}^{(1)} + I_{xy}^{(2)} + I_{xy}^{(3)} = -680,68 \text{ cm}^4 \neq 0$$

Poiché il momento di inerzia misto Ixy non è zero, i momenti di inerzia calcolati non sono sono principali. Calcoliamo, quindi, i momenti di inerzia principali e l'angolo di cui dobbiamo ruotare il sistema di riferimento al fine di renderlo principale di inerzia.

$$I_{\xi\eta} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = \frac{2627,51}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1893,13}{2}\right)^2 + (-680,68)^2} = 1313,75 \pm 1165,89$$

$$I_x > I_y \Rightarrow I_\xi > I_\eta \Rightarrow I_\xi = 2479,64\ cm^4 \qquad I_\eta = 147,86\ cm^4$$

$$\Theta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2 I_{xy}}{I_y - I_x}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(0,72) = 0,31 \quad \Rightarrow \quad 0,31 : \pi = x : 180 \Rightarrow x = \frac{0,31 \cdot 180}{\pi} = 17,77^\circ$$