Esercizio

Stabilire se la seguente funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \ln\left(3 + \dfrac{xy}{x^2+y^2}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è differenziabile in $(0,0)$.

Svolgimento

1) Continuità

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} y\log\left(3+\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right) & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\log\left(3+\frac{xy}{x^2+y^2}\right) \Rightarrow \lim_{\rho\to0^+} \rho\sin\theta\log\left(3+\frac{\cancel{\rho}\cos\theta\cancel{\rho}\sin\theta}{\cancel{\rho^2}}\right) =$$

$$= \lim_{\rho\to0^+} \rho\sin\theta\,\overbrace{\log\left(3+\cos\theta\sin\theta\right)}^{\text{limitato}} = 0 = f(0,0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f \text{ è continua in } (0,0)$$

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta & \rho\in[0,+\infty) \\ y=\rho\sin\theta & \theta\in[0,2\pi) \end{cases}$$

$$x^2+y^2=\rho^2$$

2) Derivabilità

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = f_x(x_0, y_0)$$

Se esiste finito

$$\lim_{K\to 0} \frac{f(x_0, y_0+K) - f(x_0, y_0)}{K} = f_y(x_0, y_0)$$

Se esiste finito

$$f(x,y) = \begin{cases} y \log\left(3 + \dfrac{xy}{x^2+y^2}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0 \log\left(3 + \frac{0}{h^2}\right) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0 = f_x(0,0)$$

Gquadroblog

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{k\log\left(3+\frac{0}{k^2}\right)-0}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\cancel{k}\log 3}{\cancel{k}} =$$

$$= \log(3) = f_y(0,0)$$

3) Diff.bilità

$$\boxed{\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h,y_0+k)-f_x(x_0,y_0)h-f_y(x_0,y_0)k-f(x_0,y_0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0}$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-\overbrace{f_x(0,0)}^{0}h-\overbrace{f_y(0,0)}^{\log(3)}k-\overbrace{f(0,0)}^{0}}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{k\log\left(3+\frac{hk}{h^2+k^2}\right) - \log(3)\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho\sin\theta\log\left(3+\frac{\cancel{\rho}\cos\theta\,\cancel{\rho}\sin\theta}{\cancel{\rho^2}}\right) - \rho\sin\theta\log 3}{\sqrt{\rho^2}} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\cancel{\rho}\left[\sin\theta\log(3+\cos\theta\sin\theta) - \sin\theta\log 3\right]}{\cancel{\rho}} =$$

$$= \sin\theta\left[\log(3+\cos\theta\sin\theta) - \log 3\right]$$

$$\begin{cases} h = \rho\cos\theta & \rho\in[0,+\infty) \\ k = \rho\sin\theta & \theta\in[0,2\pi) \end{cases}$$

$$h^2+k^2=\rho^2$$

Gquadroblog

Poiché il risultato del limite dipende da θ, il limite non esiste $\Rightarrow f$ non è differenziabile in $(0,0)$.