Esercizio 1

Data la funzione $f(x, y) = \sqrt{xy} + \frac{1}{2}$ disegnarne il dominio e calcolarne il piano tangente nel punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$.

Esercizio 2

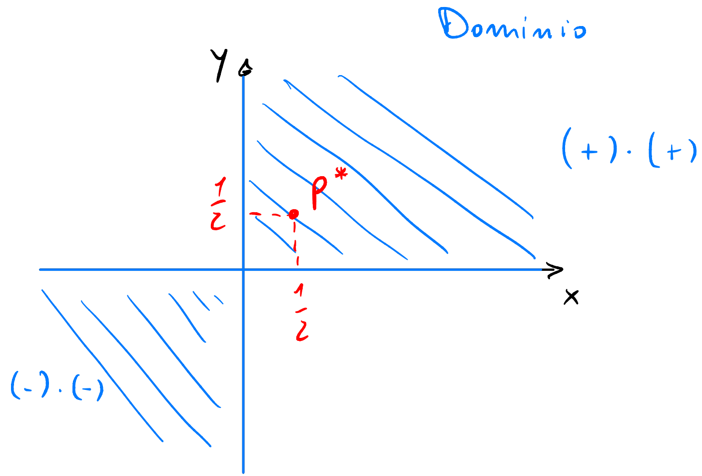
Data la funzione $f(x, y) = \sqrt{\frac{4}{x^2 + y^2} - 1}$ disegnarne il dominio e calcolare il piano tangente al suo grafico nel punto $P = (1,1)$.

Esercizio 4

$$f(x,y) = \sqrt{xy} + \frac{1}{2} \qquad P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

1) Dominio

$$xy \geq 0 \Rightarrow \begin{array}{l} (+)\cdot(+) \geq 0 \\ (-)\cdot(-) \geq 0 \end{array}$$



La funzione è continua in $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

2) Derivate Parziali

$$f_x(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{xy}} \cdot y$$

$$f_y(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{xy}} \cdot x$$

$\Rightarrow$ Dom f_x, f_y è Dom f esclusi gli assi.

$\mathrm{Dom}\, f_x, f_y \Rightarrow xy > 0$

$P^* \in \mathrm{Dom}\, f_x, \mathrm{Dom}\, f_y \Rightarrow f$ è derivabile in P^*.

Poiché $f \in C^1(P^*)$, f è diff.bile in $P^* \Rightarrow$ esiste il piano tangente.

3) Piano tangente

$$\boxed{z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}$$

Piano tangente in (x_0, y_0)

$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1$ $\qquad f_x\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$f_y\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$z=1+\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(y-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow z=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}y-\frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y \Rightarrow 2z=1+x+y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x+y-2z+1=0}$$

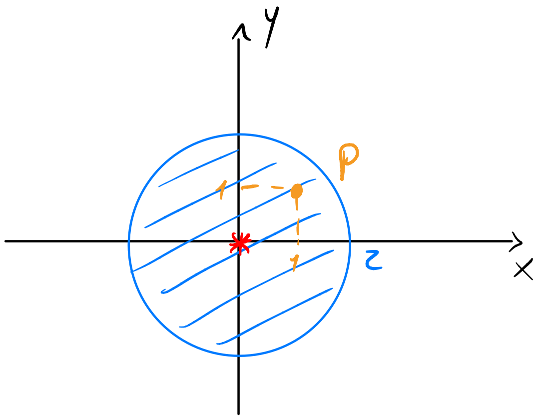
Gquadroblog

Esercizio 2

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{4}{x^2+y^2} - 1} \qquad P(1,1)$$

1) Dominio

$$\frac{4}{x^2+y^2} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{4 - x^2 - y^2}{x^2+y^2} \geq 0$$



- $4 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 4$
- $x^2 + y^2 > 0 \Rightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \qquad C(x_0, y_0) \qquad R = 2$$

La funzione è continua in $P=(1,1)$

2) Derivate parziali

$$f(x,y)=\sqrt{\frac{4-x^2-y^2}{x^2+y^2}}$$

$$f_x(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{4-x^2-y^2}{x^2+y^2}}}\cdot\frac{-2x(x^2+y^2)-(4-x^2-y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=$$

$$=\frac{1}{\cancel{2}}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{4-x^2-y^2}}\cdot\frac{\cancel{2}x(\cancel{-x^2}\cancel{-y^2}-4\cancel{+x^2}\cancel{+y^2})}{(x^2+y^2)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{4-x^2-y^2}}\cdot\frac{-4x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{4-x^2-y^2}} \cdot \frac{-4y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\text{Dom } f_x, f_y \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{4-x^2-y^2} \geq 0 \Rightarrow \begin{array}{l} x^2+y^2 \geq 0 \Rightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ 4-x^2-y^2 > 0 \Rightarrow x^2+y^2 < 4 \end{array} \\ (x^2+y^2)^2 \neq 0 \Rightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \end{cases}$$

f_x e f_y sono continue in $P \Rightarrow f \in C^1(P) \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ è diff.bile in $P \Rightarrow$ esiste il piano tangente in P.

3) $z = f(1,1) + f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1)$

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{4-x^2-y^2}{x^2+y^2}} \qquad f_y(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{4-x^2-y^2}} \cdot \frac{-4y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{4-x^2-y^2}} \cdot \frac{-4x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f(1,1) = \sqrt{\frac{2}{2}} = 1 \qquad f_x(1,1) = \frac{-4}{(2)^2} = -1 \qquad f_y(1,1) = -1$$

$$z = 1 + (-1)(x-1) + (-1)(y-1) \Rightarrow z = 1 - x + 1 - y + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x + y + z - 3 = 0}$$