Continuità, Derivabilità e Differenziabilità

1) Continuità.

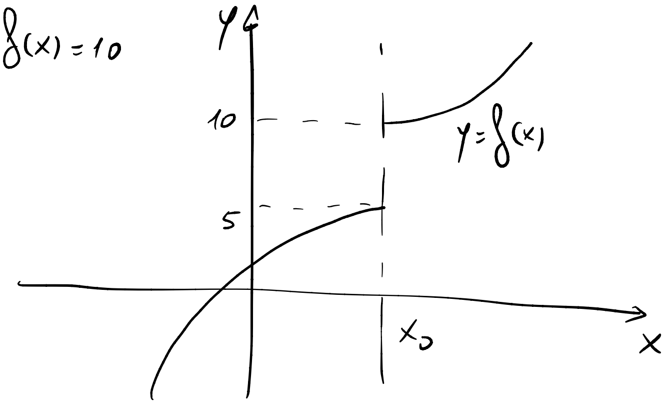
$f: A(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$ $\qquad (x_0, y_0) \in A$

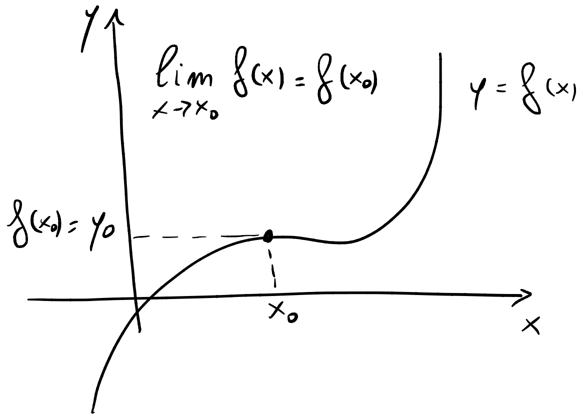
$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)}$$

Analogia per $f: A(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = 5$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = 10$$





Esempio 1

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^2}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{\rho\cos\theta\,\rho^2\sin^2\theta}{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{\rho^{\cancel{3}}\cos\theta\sin^2\theta}{\cancel{\rho^2}}=0$$

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta & \rho\in[0,+\infty)\\ y=\rho\sin\theta & \theta\in[0,2\pi)\end{cases}$$

Poiché esiste finito, il limite della funzione vale 0.

Poiché $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\neq f(0,0)$ la funzione non è continua in $(0,0)$.

Esempio 2

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^2\cos^2\theta\, \cancel{\rho^2}\sin^2\theta}{\cancel{\rho^2}} = 0$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta & \rho \in [0,+\infty) \\ y = \rho\sin\theta & \theta \in [0, 2\pi) \end{cases}$$

$$x^2+y^2 = \rho^2$$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \rho^2$$

Il limite esiste finito e vale 0.

Poiché $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$, la funzione è continua in $(0,0)$.

2) Derivabilità (Derivate Parziali)

$$f : A (\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \to z = f(x, y)$$

Se esiste finito

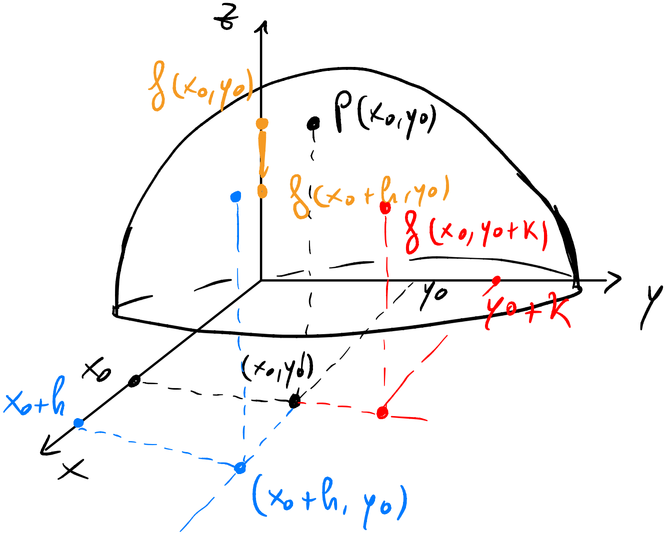
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Derivata parziale rispetto a x

$$\lim_{K \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + K) - f(x_0, y_0)}{K} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Derivata parziale rispetto a y

Se esiste finito



$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\lim_{K \to 0} \frac{f(x_0, y_0+K) - f(x_0, y_0)}{K}$$

Oss 1

Per le funzioni di due variabili la derivabilità non implica la continuità.

Derivabilità $\not\Rightarrow$ Continuità

Esempio 3

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

$$\lim_{K \to 0} \frac{f(0,0+K) - f(0,0)}{K} = \lim_{K \to 0} \frac{\frac{0}{K^2} - 0}{K} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

La funzione è derivabile in $(0,0)$.

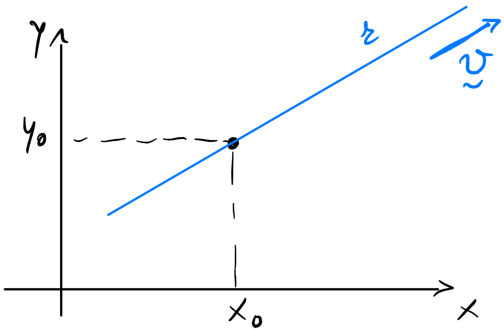
Oss:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0)$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} f_x(x_0,y_0) \\ f_y(x_0,y_0) \end{pmatrix} = \underset{\sim}{\nabla} f(x_0,y_0) \\ \text{Gradiente di } f \text{ in } (x_0,y_0)}$$

Derivata direzionale



$$\|\underset{\sim}{v}\| = 1$$

$$r : \begin{cases} x = x_0 + t v_1 \\ y = y_0 + t v_2 \end{cases}$$

$$\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x_0} + t\,\underset{\sim}{v}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t v_1, y_0 + t v_2) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{v}}(x_0, y_0)$$

se esiste finito

Oss 3

$$\underset{\sim}{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \qquad \underset{\sim}{v}^* = \frac{\underset{\sim}{v}}{\|\underset{\sim}{v}\|} = \frac{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \begin{pmatrix} \dfrac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \\ \dfrac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \end{pmatrix}$$

Esempio 4

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\underset{\sim}{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^T$$

Svolgimento

$$\| \underset{\sim}{v} \| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

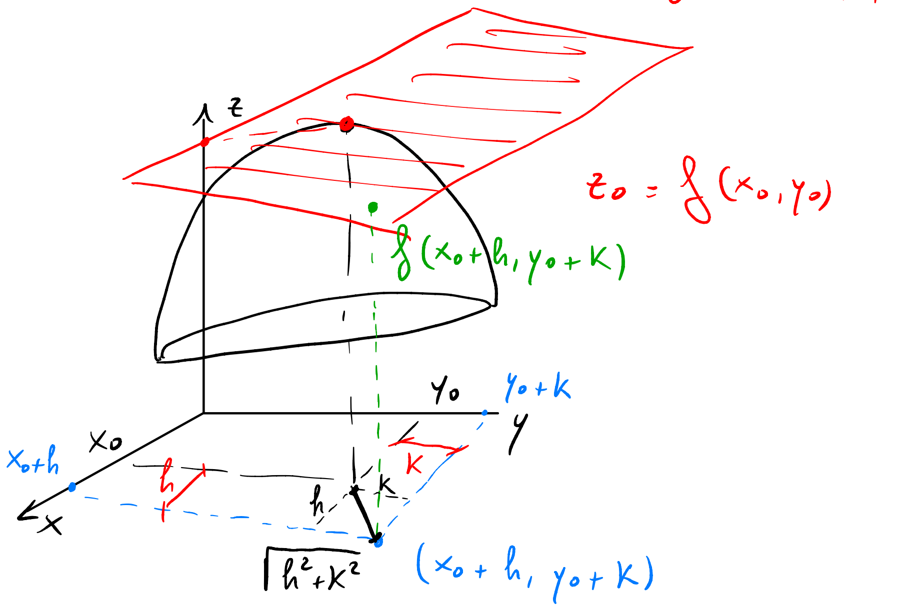
Norma Unitaria OK

$$\lim_{t \to 0} \frac{f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t, \frac{\sqrt{2}}{2}t\right) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}t \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2} - 0}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{t^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^2}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t^3}\ \frac{\sqrt{2}}{4}}{\cancel{t^2 \cdot t}} = \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{v}}(0,0)$$

3) Differenziabilità

$$z = z_0 + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$



$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f_x(x_0,y_0)h - f_y(x_0,y_0)k - f(x_0,y_0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Oss

Diff.bilità $\Rightarrow$ Derivabilità

$\Rightarrow$ Continuità

Esempio

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) Continuità

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\cancel{\rho^2}\cos^2\theta\, \rho \sin\theta}{\cancel{\rho^2}} = 0 \Rightarrow$$

Il limite esiste e vale 0 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ f è continua in $(0,0)$

2) Derivabilità

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2\cdot 0}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

$$\lim_{K\to 0} \frac{f(0,K)-f(0,0)}{K} = \lim_{K\to 0} \frac{\frac{0\cdot K}{K^2}-0}{K} = \lim_{K\to 0} \frac{0}{K} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

Poiché i limiti esistono finiti, f è derivabile.

3) Differenziabilità

$$\lim_{(h,K)\to(0,0)} \frac{f(h,K) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)K - f(0,0)}{\sqrt{h^2+K^2}} \overset{?}{=} 0$$

$$\lim_{(h,K)\to(0,0)} \frac{\frac{h^2K}{h^2+K^2} - 0 - 0 - 0}{\sqrt{h^2+K^2}} = \lim_{(h,K)\to(0,0)} \frac{h^2K}{(h^2+K^2)\sqrt{h^2+K^2}} =$$

$$\begin{cases} h = \rho\cos\theta \\ k = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \rho\in[0,+\infty) \quad \theta\in[0,2\pi)$$

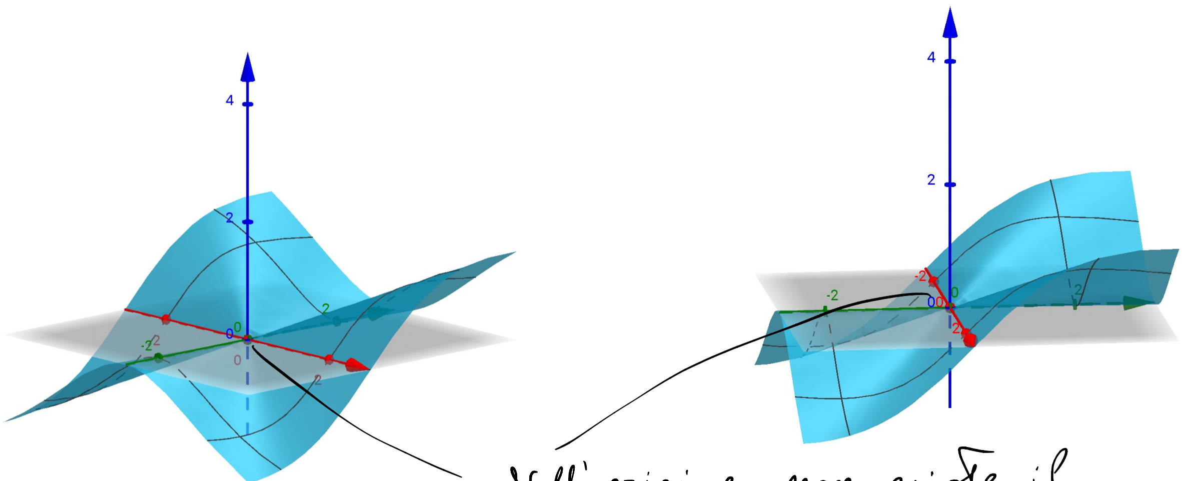
$$h^2+K^2=\rho^2$$

$$= \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\cancel{\rho^2}\cos^2\theta\,\rho\sin\theta}{\cancel{\rho^2}\sqrt{\rho^2}} =$$

$$= \lim_{\rho \to 0^+} \frac{\cancel{\rho} \cos^2\theta \sin\theta}{\cancel{|\rho|}} = \cos^2\theta \sin\theta$$

Poiché il risultato dipende da θ, il limite non esiste $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ non è differenziabile in $(0,0)$.



Nell'origine non esiste il piano tangente

Oss 6

Ogni funzione è continua nel proprio dominio.

Oss 7

Se $f \in C^1(A)$, cioè se f è continua in A e le sue derivate parziali prime esistono e sono continue in A, f è differenziabile in A.

(Teorema della differenziabilità totale)

$f(x,y) = e^{x+y} \Rightarrow \mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R}^2$

$\mathrm{Dom}\, f_x$ e $\mathrm{Dom}\, f_y = \mathbb{R}^2 \Rightarrow f \in C^1(\mathbb{R}^2)$

Oss 8

Se $f \in C^1(A)$, allora:

$$\frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{v}}(x_0, y_0) = \langle \underset{\sim}{\nabla} f(x_0, y_0), \underset{\sim}{v} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= f_x(x_0, y_0) \cdot v_1 + f_y(x_0, y_0) \cdot v_2$$

con

$$\| \underset{\sim}{v} \| = 1, \quad (x_0, y_0) \in A$$