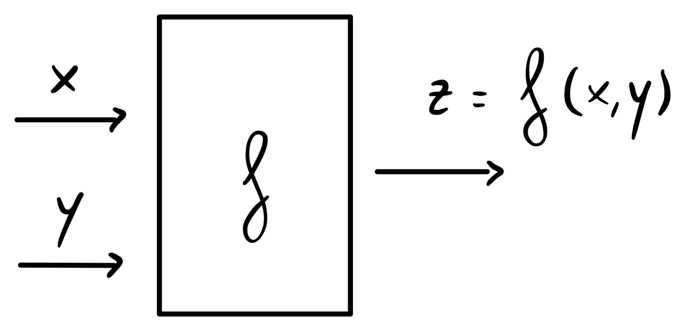
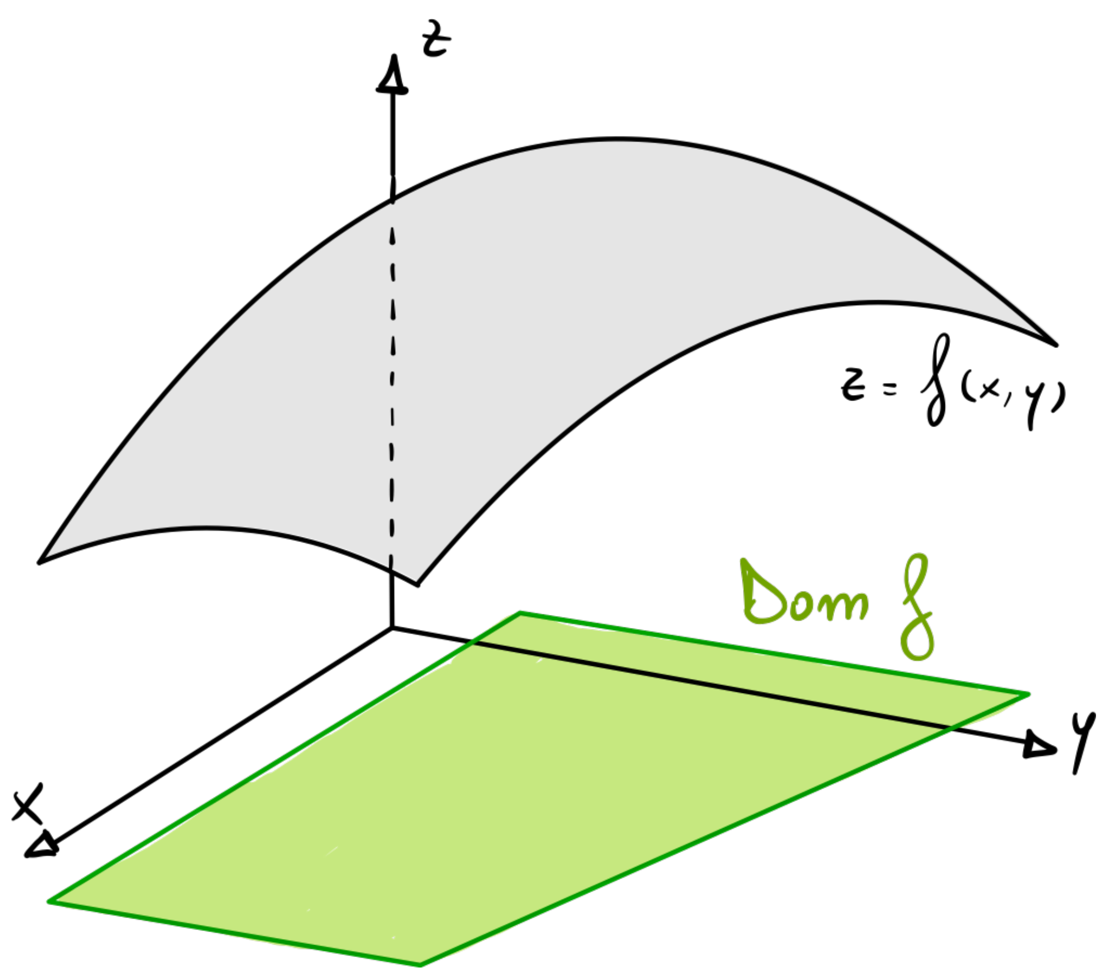
$$f : A(\subseteq \mathbb{R}^2) \to B(\subseteq \mathbb{R})$$

$$(x_0, y_0) \in A \qquad z = f(x_0, y_0) \in B$$





$$Graf\ f = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in Dom\ f,\ z = f(x, y) \right\}$$

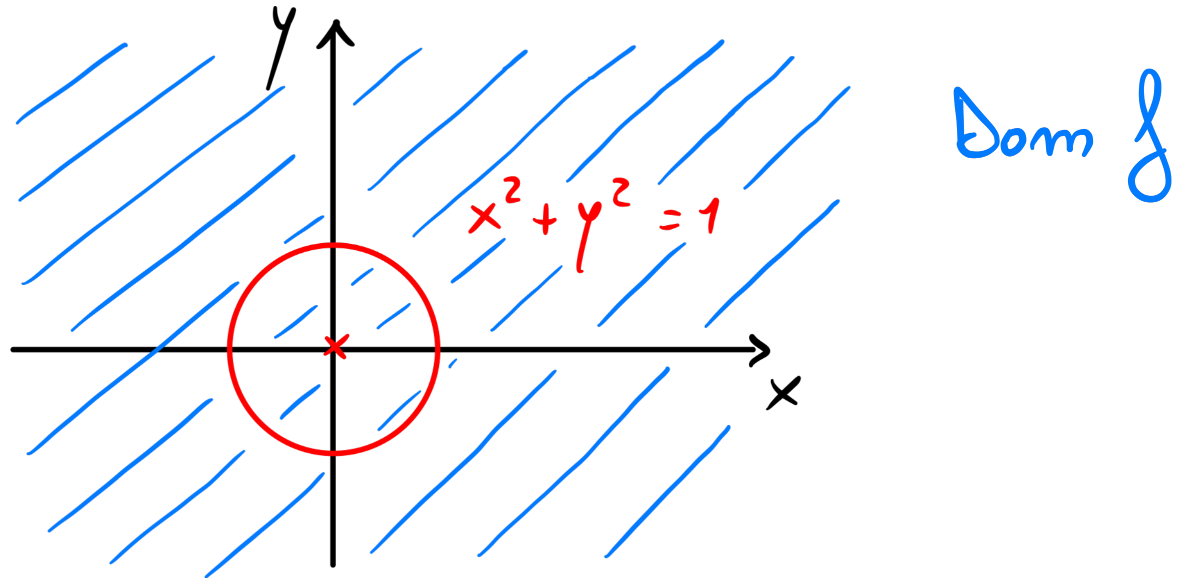
$$Dom\ f \subseteq \mathbb{R}^2$$

Esempio 1

Determinare il dominio di $f(x, y) = \dfrac{1}{\ln(x^2 + y^2)}$.

Svolgimento

$$\begin{cases} \ln(x^2+y^2) \neq 0 & \Rightarrow \quad x^2+y^2 \neq 1 \\ x^2+y^2 > 0 & \Rightarrow \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \end{cases}$$



Osservazione 1

Ricordiamo che $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ è l'equazione di una circonferenza di centro (x_0, y_0) e raggio r.

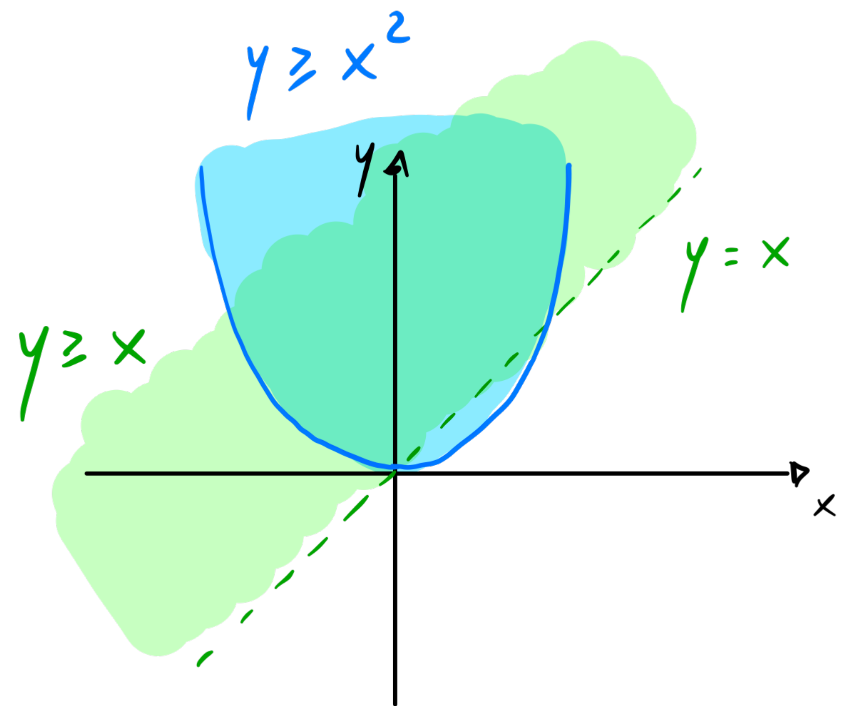
@gquadroblogesercizi

Esempio 2

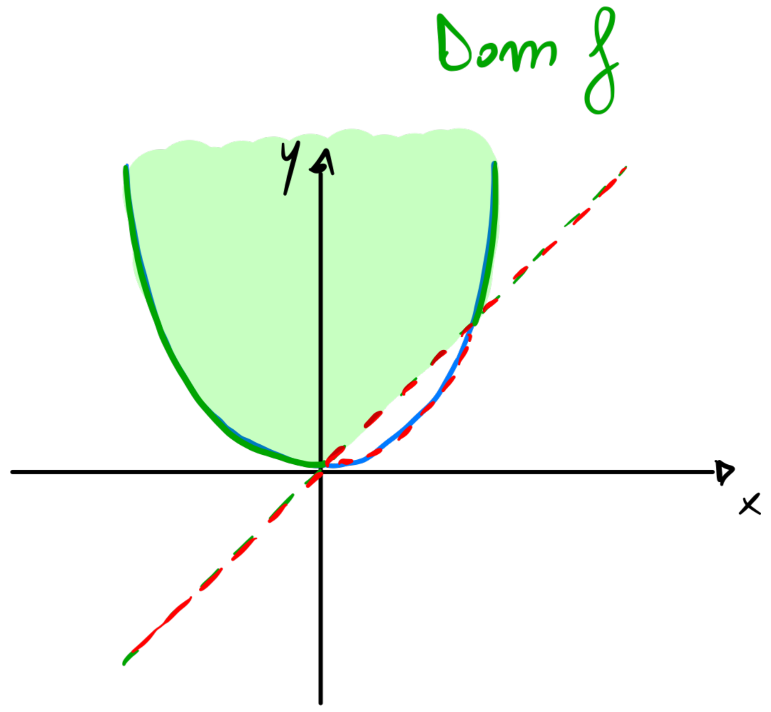
Determinare il dominio di $f(x, y) = \ln(y - x) + \sqrt{y - x^2}$.

Svolgimento

$$\begin{cases} y - x > 0 \Rightarrow y > x \\ y - x^2 \geq 0 \Rightarrow y \geq x^2 \end{cases}$$

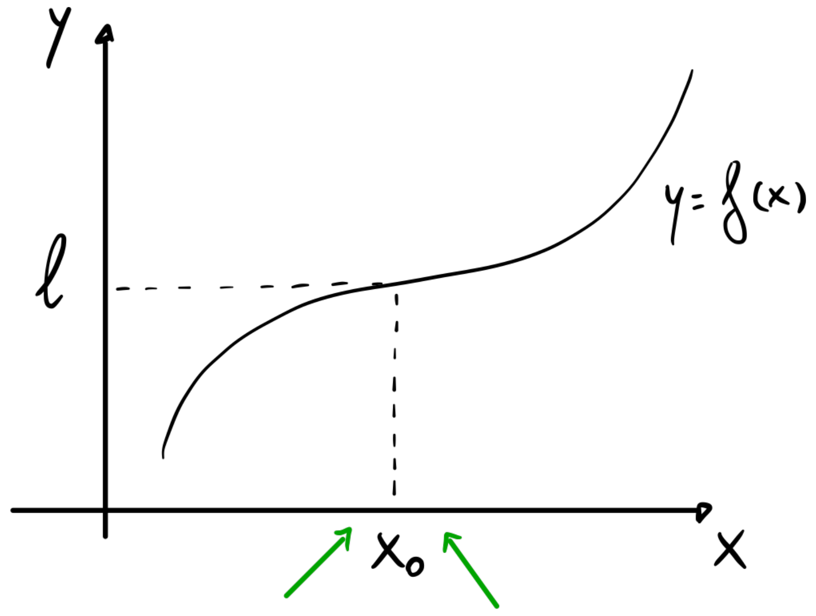


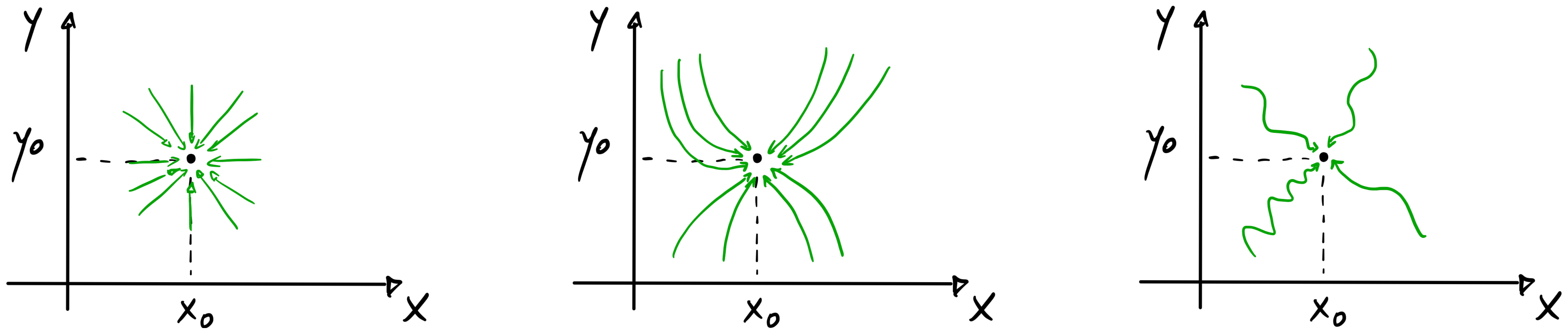
$\Rightarrow$



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

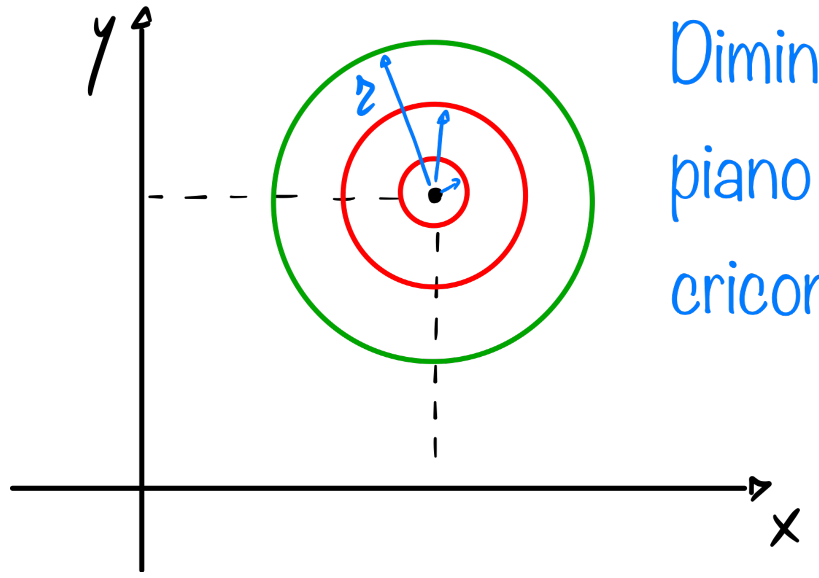
$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x, y) = l$$



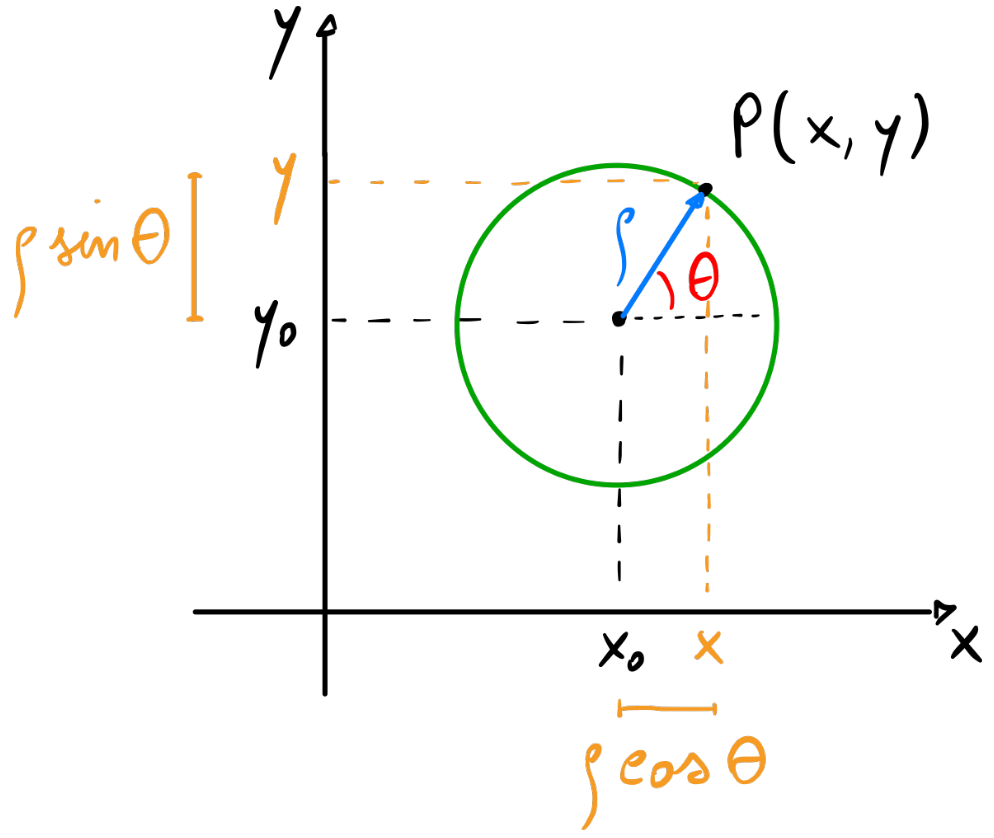


Possiamo avvicinarci a x_0
da sinistra o da destra

$$\lim_{x \to x_{0^-}} f(x) = \lim_{x \to x_{0^+}} f(x) = l$$



Diminuiamo pian
piano il raggio della
criconferenza.



$$\begin{cases} x = x_0 + \rho\cos\theta & \rho \in [0, +\infty) \\ y = y_0 + \rho\sin\theta & \theta \in [0, 2\pi) \end{cases}$$

Coordinate polari di centro (x_0, y_0).

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0} f(x_0+\rho\cos\theta, y_0+\rho\sin\theta)$$

Se il valore del limite risulta indipendente da θ si dice che il limite esiste e assume quel valore.

Osservazione 2

La non esistenza di un limite può essere verificata anche utilizzando il fascio proprio di rette di centro (x_0, y_0), la cui equazione è data da $y = y_0 + m(x - x_0)$.

Se, infatti, il risultato del limite $\lim_{x\to x_0} f(x, y_0 + m(x - x_0))$ risulta dipendente da m, possiamo concludere che il limite

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ non esiste.

Esempio 1

Calcolare $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y-2xy^2}{x^2+y^2+2x^2y^2}$

Svolgimento

Riscriviamo il limite utilizzando le coordinate polari di centro $(0,0)$:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta & \rho\in[0,+\infty) \\ y=\rho\sin\theta & \theta\in[0,2\pi) \end{cases}$$

Si ha:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y-2xy^2}{x^2+y^2+2x^2y^2} = \lim_{\rho\to0^+} \frac{\rho^3\cos^3\theta\,\rho\sin\theta-2\rho\cos\theta\,\rho^2\sin^2\theta}{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta+2\rho^2\cos^2\theta\,\rho^2\sin^2\theta} =$$

$$=\lim_{\rho\to0^+} \frac{\rho^3(\rho\cos^3\theta\sin\theta-2\cos\theta\sin^2\theta)}{\rho^2(1+2\rho^2\cos^2\theta\sin^2\theta)} = \lim_{\rho\to0^+} \frac{\rho(\rho\cos^3\theta\sin\theta-2\cos\theta\sin^2\theta)}{1+2\rho^2\cos^2\theta\sin^2\theta} =$$

$$=\frac{0(0-2\cos\theta\sin^2\theta)}{1+0} = 0$$

Poiché il risultato non dipende da θ, il limite esiste e vale 0.

Esempio 2

Calcolare $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^2}{x^2+y^2}$

Svolgimento

Calcoliamo il limite lungo le rette $x=0$ e $y=0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to 0} x = 0$$

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{y^2} = 1$$

Poiché i limiti lungo due direzioni diverse non coincidono, il limite non esiste.