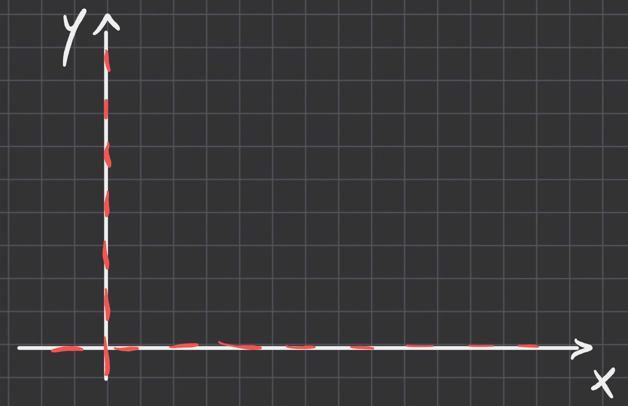
**Esercizio 2**

Dato il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left( \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right)$$

determinare se sia o meno conservativo nel primo quadrante del piano cartesiano privato degli assi. In caso affermativo, determinare il potenziale $U(x,y)$ tale che $U(1,0) = 4$.

## Svolgimento




1) Dominio

$x^2 + y^2 \neq 0 \Rightarrow \text{Dom } F = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$\underset{\sim}{F}$ è continuo nel 1° quadrante.

L'insieme di studio è semplicemente connesso.

2) Irrotazionalità

$f_1(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ $\qquad$ $f_2(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{0(x^2+y^2) - x(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{0(x^2+y^2) - y(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underset{\sim}{F}$ é irrotazionale

$\underset{\sim}{F}$ irrotaz. su insieme semplic. conn. $\Rightarrow \exists$ potenziale di $\underset{\sim}{F} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underset{\sim}{F}$ é conservativo.

3) Potenziale

$$\underset{\sim}{\nabla} U(x,y) = \underset{\sim}{F} \qquad f_1(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad f_2(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

$$U(x,y) = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+y^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+y^2| + c(y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + c(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{x^2+y^2} \cdot \cancel{2}y + c'(y) = \frac{y}{x^2+y^2} + c'(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = f_2(x,y) \Rightarrow \cancel{\frac{y}{x^2+y^2}} + c'(y) = \cancel{\frac{y}{x^2+y^2}} \Rightarrow c'(y) = 0 \Rightarrow c(y) = K$$

$$\boxed{U(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + K}$$

$$U(1,0) = 4$$

$$U(1,0) = \frac{1}{2}\ln(1+0) + K = \frac{1}{2}\ln(1) + K = K$$

$$U(1,0) = 4 \Rightarrow K = 4$$

$$\boxed{U(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + 4}$$