Esercizio

Dato il campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y) = \left(3x^2y + \cos x, x^3 + e^y\right)$

1) calcolare $F(0,0)$ e l'insieme di definizione di $\mathbf{F}$;

2) determinare se $\mathbf{F}$ è irrotazionale e se è conservativo;

3) calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la curva $\gamma(t) = (2\cos t, 3\sin t)$ con $t \in [0,2\pi]$;

4) calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la curva $\gamma_1(t) = \left(2t^2, 3t^3\right)$ con $t \in [0,1]$;

5) trovare una curva γ_2 tale che il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo γ_2 sia pari a 3.

Svolgimento

$$\underset{\sim}{F}(x,y) = \left(3x^2y + \cos x,\ x^3 + e^y\right)$$

$$\underset{\sim}{F}(0,0) = \left(0 + \cos(0),\ 0 + e^0\right) = (1, 1)$$

$\text{Dom}\,\underset{\sim}{F} = \mathbb{R}^2 \Rightarrow \text{Dom}\,\underset{\sim}{F}$ è un insieme semplicemente connesso.

2) $f_1(x,y) = 3x^2y + \cos x$; $\qquad f_2(x,y) = x^3 + e^y$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 3x^2 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 3x^2$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x} \Rightarrow \underset{\sim}{F} \text{ é irrotazionale}$$

Poiché $\underset{\sim}{F}$ è irrotazionale su un insieme semplicemente connesso

$\underset{\sim}{F}$ è conservativo (esiste il suo potenziale)

3) $\gamma(t) = (2\cos t,\ 3\sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$

$\gamma(0) = (2, 0)$

$\gamma(2\pi) = (2, 0)$

$$\int_\gamma \underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{s} = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a))$$

$\gamma(0) = \gamma(2\pi) \Rightarrow$ curva chiusa

Poiché γ è chiusa e $\underset{\sim}{F}$ è conservativo:

$$\mathcal{L} = \int_\gamma \underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{s} = 0$$

a) $\gamma_1(t) = (2t^2, 3t^3) \quad t \in [0,1]$

$$\left.\begin{array}{l}\gamma_1(0) = (0,0) \\ \gamma_1(1) = (2,3)\end{array}\right. \Rightarrow \gamma_1(0) \neq \gamma_1(1) \Rightarrow \text{Curva Aperta}$$

Calcoliamo il lavoro di $\underset{\sim}{F}$ come differenza di potenziale.

$$\nabla \underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{F} \Rightarrow \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right) = \left(3x^2y + \cos x,\ x^3 + e^y\right)$$

$$U(x,y) = \int (3x^2y + \cos x)\,dx = \cancel{3}\frac{x^3}{\cancel{3}}y + \sin x + C(y)$$

$$U(x,y) = x^3y + \sin x + C(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^3 + C'(y) \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial y} = f_2(x,y) \Rightarrow \cancel{x^3} + C'(y) = \cancel{x^3} + e^y \Rightarrow C'(y) = e^y \Rightarrow$$

$$C(y) = \int e^y\,dy = e^y + K$$

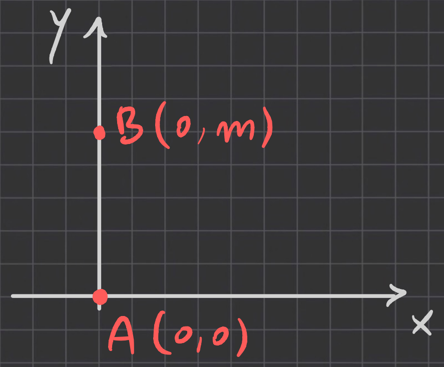
$$U(x,y) = x^3 y + \sin x + e^y + K$$

$$\mathcal{L} = \int_{\gamma_1} \underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{s} = U(\gamma(1)) - U(\gamma(0)) = U(2,3) - U(0,0) =$$

$$= 8 \cdot 3 + \sin(2) + e^3 - (0 + 0 + e^0) = 24 + \sin(2) + e^3 - 1 =$$

$$= 23 + \sin(2) + e^3$$

5) γ_2 : $\mathcal{L}_{\gamma_2} = 3$



$$\gamma_2(t) = \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \qquad t \in [0, m]$$

$$\mathcal{L}_{A \to B} = U(B) - U(A) = U(0,m) - U(0,0) =$$

$$= e^m + K - (e^0 + K) = e^m - 1$$

$$\mathcal{L}_{A\to B} = 3 \Rightarrow e^m - 1 = 3 \Rightarrow e^m = 4 \Rightarrow m = \ln(4)$$

$$\gamma_2(t) = \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \qquad T \in [0, \ln(4)]$$